BAB II

PERSAMAAN TINGKAT SATU DERAJAT SATU

Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami cara-cara menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat satu dan dapat mengaplikasikannya dalam menentukan selesaian khusus masalah nilai awal dengan syarat awal.

Kompetensi Dasar

1. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial variable terpisah dan selesaian khusus masalah nilai awal.
2. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial yang dapat direduksi ke persamaan variable terpisah dan selesaian khusus masalah nilai awal.
3. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial homogen dan selesaian khusus masalah nilai awal.
4. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial tidak homogen dan selesaian khusus masalah nilai awal.
5. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial eksak dan selesaian khusus masalah nilai awal.
6. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial tidak eksak dan selesaian khusus masalah nilai awal.
7. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial berbentuk $yf(xy)\,dx + xg(xy)\,dy = 0$ dan selesaian khusus masalah nilai awal.
8. Mahasiswa dapat menentukan trayektori orthogonal dan trayektori isogonal suatu persamaan keluarga kurva.

Persamaan tingkat tingkat satu derajat satu yang dijelaskan pada bab II buku ini membahas: (1) persamasaan diferensial variable terpisah, (2) persamaan diferensial yang dapat direduksi ke persamaan diferensial variabel terpisah. (3) persamaan diferensial homogen, (4) persamaan diferensial tidak homogen, (5) persamaan diferensial ekskak, (6) persamaan diferensial tidak eksak, (7) persamaan diferensial bentuk umum $yf(xy)\,dx + xg(xy)\,dy = 0$, dan (8) trayektori.

Sebagaimana telah dijelaskan pada bab I, persamaan diferensial tingkat satu derajat satu adalah persamaan diferensial yang didalamnya memuat turunan tertinggi yaitu turunan tingkat satu yang dilambangkan dengan $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Secara umum persamaan diferensial tingkat satu derajat satu ditulis dalam bentuk:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Bentuk di atas dapat disederhanakan menjadi:

$\Leftrightarrow M(x, y)dx = -N(x, y)dy$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ .... bentuk eksplisit

$\Leftrightarrow F(x, y, \dfrac{dy}{dx}) = 0$ .... bentuk implisit

Bentuk umum yang disebutkan di atas mengakibatkan jenis persamaan diferensial tingkat satu derajat satu terdiri atas beberapa jenis. Untuk lebih memudahkan dalam menentukan primitif atau selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat satu, dilakukan pengelompokan menjadi beberapa jenis.

1) Persamaan diferensial variabel terpisah.
2) Persamaan yang dapat direduksi ke persamaan diferensial variabel terpisah.
3) Persamaan diferensial homogen.
4) Persamanaan diferensial tidak homogen.

5) Persamaan diferensial eksak.
6) Persamaan diferensial tidak eksak.
7) Persamaan diferensial yang berbentuk $yf(xy)\ dx + xg(xy)\ dy = 0$

Persamaan-persamaan diferensial tersebut di atas masing-masing mempunyai karakteristik dan ciri-ciri yang berbeda-beda. Prinsip utama dalam menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat satu adalah mengelompokkan masing-masing koefisien diferensial dengan diferensial yang sejenis atau sedapat mungkin menjadikan sejenis masing-masing koefisien diferensialnya. Khusus untuk persamaan diferensial yang tidak dapat dipisahkan variabelnya, maka cara lain (*tabel, teorema*) akan sangat membantu.

Berikut ini disajikan cara menentukan selesaian persamaan diferensial tingkat satu derajat satu.

2.1 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Persamaan diferensial tingkat satu derajat satu yang mempunyai bentuk umum $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dapat dikategorikan sebagai persamaan diferensial variable terpisah (*separable*), jika $M(x,y) = f(x)$ dan $N(x,y) = g(y)$. Atau dengan kata lain $M(x,y)$ adalah fungsi x saja dan $N(x,y)$ adalah fungsi y saja. Sehingga bentuk umumnya $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ditulis dalam bentuk $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Perhatikan contoh berikut ini.

1. $(x - 3x^2)\ dx + 2y\ dy = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - 3x^2\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -(x - 3x^2) = (3x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{3x^2 - x}{2y}\right)$$

2. $y^2 dx - xdy$

$$\Leftrightarrow y^2 - x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

3. $y' = y\sqrt{1-2x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-2x^2}\,dx - \frac{dy}{y}$$

4. $x\ dx - \sin y\ dy = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = 2y^2\sqrt{1+x^2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x^2}\,dx - \frac{dy}{y^2} = 0$$

Karena tanda diferensial persamaan di atas dx dan dy berpasangan dengan variable yang sejenis yaitu x berpasangan dengan dx dan y berpasangan dengan dy, sehingga untuk menentukan selesaian umum persamaan tersebut cukup dengan mengintegralkan masing masing bagian.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

1.	Tentukan selesaian umum persamaan diferensial $x\ dx + 2\ dy = 0$ Jawab Dengan mengintegralkan masing-masing bagian, diperoleh: $\int xdx + \int 2dy = c$ $\frac{1}{2}x^2 + c_1 + 2y + c_2 = c$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2y = c - c_1 - c_2$ $\Leftrightarrow x^2 + 4y = c$

	$\Leftrightarrow y = \dfrac{c - x^2}{4}$ Persamaan $y = \dfrac{c - x^2}{4}$ disebut primitif atau persamaan keluarga kurva atau selesaian umum persamaan diferensial $x\,dx + 2\,dy = 0$.
2.	Tentukan selesaian persamaan diferenesial $\dfrac{dx}{y} - 3\dfrac{dy}{x} = 0$ Jawab Persamaan di atas dapat diubah menjadi $xdx - 3ydy = 0$ Dengan mengintegralkan masing-masing bagian diperoleh: $\int x\,dx - \int 3y\,dy = 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}y^2 = c$ $\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = c$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}y^2 = c$ $\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = c$ $\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2 - c}{3}}$ Sehingga selesaian umum persamaan diferensial di atas adalah $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2 - c}{3}}$
3.	Tentukan selesaian umum persamaan diferensial $xdx + 2ydy = 0$ Jawab Masing-masing bagian dari persamaan diintegralkan, diperoleh:

	$\int x\ dx + \int 2y\ dy = c$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + y^2 = c$ $\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = c$ $\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{c - x^2}{2}}$ Sehingga selesaian umum persamaan diferensial di atas adalah $y = \pm\sqrt{\frac{c - x^2}{2}}$
4.	Tentukan selesaian umum persamaan: $\sin x\ dx + (1 - y)\ dy = 0$ dengan y(π) = 1 Jawab Dengan mengintegralkan masing-masing bagian diperoleh: $\int \sin x\ dx + \int (1 - y)dy = c$ $\Leftrightarrow -2\cos x + 2y - y^2 = c$ Karena y(π) = 1 maka diperoleh $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2(1) - (1)^2 = c$ Diperoleh c = 3, sehingga selesaian khusus persamaan diferensial $\sin x\ dx + (1 - y)\ dy = 0$ adalah $-2\cos x + 2y - y^2 = 3$
5.	Tentukan selesaian umum persamaan $(1 + 2y)dx - (4 - x)dy = 0$ Jawab Persamaan $(1 + 2y)dx - (4 - x)dy = 0$ dapat diubah menjadi $\frac{dx}{4 - x} - \frac{dy}{1 + 2y} = 0$ Selanjutnya dengan mengintegralkan masing-masing bagian diperoleh

	$\int \frac{dx}{4-x} - \int \frac{dy}{1+2y} = c$ $\Leftrightarrow -\ln\lvert 4-x\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert 1+2y\rvert = c$ $\Leftrightarrow -\left(\ln\lvert 4-x\rvert + \ln\sqrt{1+2y}\right) = c$ $\Leftrightarrow \left(\ln\lvert 4-x\rvert + \ln\sqrt{1+2y}\right) = c$ $\Leftrightarrow \ln\left\lvert (4-x)\sqrt{1+2y}\right\rvert = c$ $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{1+2y} = c$ $\Leftrightarrow 1+2y = \frac{c}{(4-x)^2}$ $\Leftrightarrow 2y = \frac{c}{(4-x)^2} - 1$ $\Leftrightarrow y = \frac{c-(4-x)^2}{2(4-x)^2}$ Sehingga selesaian umum persamaan diferensial di atas adalah $y = \frac{c-(4-x)^2}{2(4-x)^2}$

Latihan soal

Tentukan selesaian persamaan diferensial di bawah ini.

1. $y^2 dx - x dy = 0$
2. $\cos y\ dx + (1+e^{-x})\ dy = 0$
3. $dx + (1-x^2)\cot y\ dy = 0$
4. $\frac{1}{3}\frac{dy}{dx} = 1 - \sec x$
5. $(1-x^2)y' = 2$
6. $(1-2y)dx + (4-x)\ dy = 0$

7. $xdy - ydx = 0$ *dengan* $y(1) = 1$

8. $(1-x)\,dx - 2y^2 dy = 0$ *dengan* $y(0) = 1$

9. $y' = x^3(1-y)$ *dengan* $y(0) = 3$

10. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$ dengan $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

11. $y' = 2x^3 e^{-2y}$ *dengan* $y(1) = 0$

12. $y' = x^3(1-y)$ *dengan* $y(0) = 3$

13. $y' = -2x^3$*dengan* $y(1) = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 y^2$ *dengan* $y(1) = 0$

15. $y' = \dfrac{2}{y^2}$ *dengan* $y(0) = 0$

Catatan

Yang perlu diingat bahwa persamaan diferensial dengan variable terpisah memiliki ciri spesifik yaitu koefisien diferensial berupa variable sejenis berkumpul dengan diferensialnya, dengan kata lain dapat dinyatakan dalam bentuk sederhana $f(x)dx + g(y)dy = 0$

2.2 Persamaan yang Direduksi ke Persamaan Variabel Terpisah

Persamaan diferensial tingkat satu derajat satu dapat dikategorikan sebagai persamaan diferensial yang dapat direduksi menjadi persamaan diferensial variable terpisah jika bentuk umum $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow F(x)dx + G(y)dy = 0$$

Selanjutnya bentuk $\frac{1}{f_2(x)g_1(y)}$ disebut faktor integrasi. Selesaian umum persamaan diferensial yang dapat direduksi menjadi persamaan variable terpisah dapat ditentukan dengan cara mengintegralkan masing-masing bagian setelah variable yang sejenis dikelompokkan dengan diferensialnya.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

1.	Tentukan selesaian persamaan diferensial $2(y+3)dx - xydy = 0$ Jawab Persamaan di atas direduksi menjadi $\Leftrightarrow \frac{2dx}{x} - \frac{ydy}{(y+3)} = 0$ $\Leftrightarrow \int \frac{2dx}{x} - \int \frac{ydy}{(y+3)} = c$ $\Leftrightarrow 2\int \frac{dx}{x} - \int \left(1 - \frac{3}{y+3}\right) dy = c$ $\Leftrightarrow 2\int \frac{dx}{x} - \int 1dy + \int \frac{3}{y+3} dy = c$ $\Leftrightarrow 2\ln\lvert x\rvert - y - 3\ln\lvert y+3\rvert = c$ $\Leftrightarrow \ln x^2 + \ln\lvert (y+3)^3\rvert = c + y$ $\Leftrightarrow \ln\lvert x^2(y+3)^3\rvert = c + y$ $\Leftrightarrow x^2(y+3)^3 = e^{c+y}$ $\Leftrightarrow x^2(y+3)^3 = ce^y$ Sehingga selesaian umum persamaan diferensial di atas adalah $x^2(y+3)^3 = ce^y$
2.	Tentukan selesaian umum persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$

	Jawab Persamaan di atas dapat direduksi menjadi: $x(y-3)dy = 4y\ dx$ $\Leftrightarrow \frac{y-3}{y}dy - \frac{4dx}{x} = 0$ $\Leftrightarrow \left(1-\frac{3}{y}\right)dy - \frac{4dx}{x} = 0$ Dengan mengintegralkan masing-masing bagian persamaan diperoleh $\Leftrightarrow \int\left(1-\frac{3}{y}\right)dy - \int\frac{3}{y}dy - \int\frac{4}{x}dx = c$ $\Leftrightarrow \int 1dy - \int\frac{3}{y}dy - \int\frac{4}{x}dx = c$ $\Leftrightarrow y - 3\ln\|y\| - 4\ln\|x\| = c$ $\Leftrightarrow y + c = 3\ln\|y\| + 4\ln\|x\|$ $\Leftrightarrow y + c = \ln\|y^3\| + \ln\|x^4\|$ $\Leftrightarrow y + c = \ln\|x^4y^3\|$ $\Leftrightarrow x^4y^3 = e^{y+c}$ $\Leftrightarrow x^4y^3 = ce^y$ Sehingga selesaian umum persamaan diferensial di atas adalah $x^4y^3 = ce^y$
3.	Tentukan selesaian persamaan diferensial $xydy = (y+1)(1-x)dx\ dengan\ y(1) = 0$ Jawab Persamaan di atas setelah direduksi, diperoleh: $\Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{x}\right)dx - \left(\frac{y}{y+1}\right)dy = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)dx - \left(1-\frac{1}{y+1}\right)dx = 0$

	Dengan mengintegralkan masing-masing bagian, diperoleh $\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=0$ $\Leftrightarrow \int\frac{dx}{x}-\int dx-\int dy+\int\frac{1}{y+1}dy=0$ $\Leftrightarrow \ln\lvert x\rvert-x-y+\ln\lvert y+1\rvert=c$ $\Leftrightarrow \ln\lvert x(y+1)\rvert=c+x+y$ $\Leftrightarrow x(y+1)=e^{c+x+y}$ Karena $y(1)=0$ maka $1(0+1)=e^{c+1+0}$. Diperleh $c=-1$ sehingga diperoleh selesaian khusus persamaan $x(y+1)=e^{x+y-1}$

Sebagai latihan bagi pembaca, tentukan selesaian persamaan diferensial dan selesaian khusus masalah nilai awal berikut ini:

1. $dx+(1-x^2)\cot y\ dy=0$
2. $\cos y\ dx+(1+e^{-x})\sin y\ dy=0$
3. $xydx+(1+x^2)dy=0$
4. $x^2(y-4)dx+y(x^2-1)dy=0$
5. $x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy^3}$

7. $y^{-1}=y'e^{\cos x}\sin x$
8. $x\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{3y}$
9. $y'=\frac{\sec^2 y}{1+x^2}$
10. $y'=y(2+\sin x)$
11. $\frac{dy}{dx}=8x^2e^{-3y}$ *dengan* $y(1)=0$
12. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2y+1}$ *dengan* $y(0)=-1$

13. $\frac{dy}{dx} = \left(1 + y^2\right)\tan x, dengan\ y(0) = \sqrt{3}$

14. $\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y\ dengan\ y(0) = \frac{\pi}{4}$

15. $\frac{dy}{dx} = y\sin x\ dengan\ y(\pi) = -3$

2.3 Persamaan Diferensial Homogen

Persamaan diferensial tingkat satu derajat satu yang berbentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut persamaan diferensial homogen jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ fungsi homogen berderajat sama.

Definisi:

1. $F(x,y)$ disebut fungsi homogen jika $F(x,y) = G\left(\frac{x}{y}\right)$ atau $F(x,y) = H\left(\frac{y}{x}\right)$
2. Fungsi $F(x,y)$ disebut fungsi homogen berderajat-n jika memenuhi syarat $F(tx,ty) = t^n F(x,y)$

Contoh:

1. $F(x,y) = \frac{x}{y-x}$ adalah fungsi homogen, karena

$$F(x,y) = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{y}{x} - \frac{x}{x}} = \frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = H\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. $F(x,y) = x + y$ adalah fungsi homogen, karena

$F(x,y) = 1 + \frac{y}{x}$ atau

$F(x,y) = \frac{x}{y} + 1$

3. $F(x,y)=1-xy$, bukan fungsi komogen karena tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $G\left(\frac{x}{y}\right)$ *atau* $H\left(\frac{y}{x}\right)$

4. $F(x,y)=3x^2-2xy+y^2$ fungsi homogen karena dapat dinyatakan dalam $G\left(\frac{x}{y}\right)$ *atau* $H\left(\frac{y}{x}\right)$

5. $F(x,y)=y\sin x$, bukan fungsi homogen.

6. $F(x,y)=y+\sqrt{1-x^2}$ bukan fungsi homogen.

7. $F(x,y)=x+y$, fungsi homogen berderajat 1, karena:

$$F(tx,ty)=(tx)+(ty)$$
$$F(tx,ty)=t(x+y)$$
$$F(tx,ty)=tF(x,y)$$

8. $F(x,y)=3x^2-2xy+y^2$ fungsi homogeny berderajat 0

9. $F(x,y)=\frac{2x}{x-y}$, fungsi homogen berderajat 0, karena

$$F(x,y)=\frac{2(tx)}{(tx)-(ty)}$$
$$F(x,y)=\frac{t(2x)}{t(x-y)}$$
$$F(x,y)=t^0\,\frac{(2x)}{(x-y)}$$
$$F(x,y)=t^0F(x,y)$$

10. Dengan cara yang sama, $F(x,y)=x^3-2x^2y+3xy^2$ adalah fungsi homogen berderajat 3 dan $G(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$ adalah fungsi homogen berderajat 2.

11. $F(x,y)=\sin(x+y)$ bukan fungsi homogen, karena $F(tx,ty)\neq t^nF(x,y)$

Jika $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah persamaan diferensial homogen, maka selesaian umumnya dapat ditentukan dengan cara menyatakan $M(x,y)$ dalam bentuk $M\left(\frac{y}{x}\right)$ *atau* $M\left(\frac{x}{y}\right)$ demikian pula $N(x,y)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $N\left(\frac{y}{x}\right)$ *atau* $N\left(\frac{x}{y}\right)$. Dengan kata lain $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ dibagi dengan koefisien diferensial dx dan dy yang berpangkat tertinggi.

Setelah dilakukan pembagian pada $M(x,y)$ dan $N(x,y)$, selanjutnya gunakan transformasi $u = \frac{x}{y}$ atau $x = uy$. Atau dapat menggunakan transformasi $v = \frac{y}{x}$ atau $y = vx$. Jika yang digunakan transformasi $yu = x$ maka diperoleh $dx = ydu + udy$. Sebaliknya jika yang digunakan transformasi $xv = y$ *maka* $dy = xdv + vdx$. Akhirnya dx atau dx tetapi bukan keduanya disubstitusikan dalam persamaan diferensial semula $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sehingga diperoleh persamaan baru

$M\left(\frac{x}{y}\right)dx + N\left(\frac{x}{y}\right)dy = 0$ atau $M\left(\frac{y}{x}\right)dx + N\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$

Dengan memilih transformasi $dy = xdv + vdx$ maka

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{y}{x}\right)dx + N\left(\frac{y}{x}\right)(xdv + vdx) = 0$$

$$\Leftrightarrow M(v)dx + N(v)(xdv + vdx)$$

$$\Leftrightarrow (M(v) + vN(v))dx + xN(v)dv = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{N(v)dv}{(M(v) + vN(v))} = 0$$

Jika yang dipilih transformasi $dx = ydu + udy$ maka

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$\Leftrightarrow M\left(\frac{x}{y}\right)(ydu + udy) + N\left(\frac{x}{y}\right)dy = 0$

$\Leftrightarrow M(u)(ydu + udy) + N(u)dy = 0$

$\Leftrightarrow yM(u)du + (uM(u) + N(u))dy = 0$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} + \frac{M(u)du}{(uM(u) + N(u))} = 0$

Bentuk terakhir persamaan yang diperoleh adalah persamaan diferensial yang dapat direduksi ke persamaan variabel terpisah. Setelah variabel yang sejenis berkumpul dengan diferensialnya dan dengan mengintgralkan masing-masing bagian akan didapat selesaian umum persamaan diferensial homogen yang diberikan.

Contoh

1.	Tentukan selesaian umum persamaan diferensial $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$ Jawab Persamaan di atas adalah persamaan diferensial homogen, karena $M(x,y)$ *dan* $N(x,y)$ adalah persamaan homogen yang berderajat dua. Selanjutnya persamaan dibagi x^2 diperoleh persamaan $\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)dx + \left(\frac{y}{x}\right)dy = c$ Gunakan transformasi $u = \frac{y}{x}$ *atau* $y = ux$, dan $dy = udx + xdu$,lalu subtitusikan ke persamaan semula $\Leftrightarrow (u^2 - 1)dx + vdy = 0$ $\Leftrightarrow (u^2 - 1)dx + u(udx + xdu) = 0$ $\Leftrightarrow (u^2 + u^2 - 1)dx + u(xdu) = 0$ $\Leftrightarrow (2u^2 - 1)dx + u(xdu) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x}+\frac{udu}{2u^2-1}=0$$

Gunakan integral untuk masing-masing bagian, sehingga:

$$\Leftrightarrow \int\frac{dx}{x}+\int\frac{udu}{2u^2-1}=c$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\int\frac{4udu}{2u^2-1}=c$$

$$\Leftrightarrow \ln|x|+\frac{1}{4}\ln|2u^2-1|=c$$

$$\Leftrightarrow 4\ln|x|+\ln|2u^2-1|=c$$

$$\Leftrightarrow \ln|x^4|+\ln|2u^2-1|=c$$

$$\Leftrightarrow \ln|x^4(2u^2-1|=c$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4\left(\frac{2y^4-x^2}{x^2}\right)\right)=c$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y^2-x^4=c$$

Sehingga selesaian umum persamaan diferensial $(y^2-x^2)dx+xydy=0$ adalah $2x^2y^2-x^4=c$

2. Tentukan selesaian persamaan diferensial

$(xy+y^2)dx-x^2dy=0$ dengan $y(2)=1$

Jawab

Persamaan di atas di bagi dengan x^2

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-dy=0$$

Transformasi $s=\frac{y}{x}$ *atau* $y=sx$ *sehingga* $dy=sdx+xds$

Dengan mensubstitusikan ke persamaan asal diperoleh

$$(s+s^2)dx-(sdx+xds)=0$$

	$\Leftrightarrow s^2dx - xds = 0$ $\Leftrightarrow \frac{dx}{x} - \frac{ds}{s^2} = 0$ $\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{ds}{s^2} = c$ $\Leftrightarrow \ln\lvert x\rvert + \frac{1}{s} = c$, karena $s = \frac{y}{x}$ maka $\Leftrightarrow \ln\lvert x\rvert + \frac{x}{y} = c$ Karena $y(2) = 1$ maka $c = 2 + \ln 2$, sehingga selesaian khusus persamaan di atas adalah $\ln\lvert x\rvert + \frac{x}{y} = 2 + \ln 2$
3.	Tentukan selesaian umum persamaan diferensial homogen berikut $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$ Jawab Persamaan dibagi dengan x^3 Diperoleh $\left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right)dx - 3\left(\frac{y^2}{x^2}\right)dy = 0$ Misal $A = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Ax$ dan didapat $dy = Adx + xdA$ Selanjutnya substitusikan dy dalam persamaan semula didapat persamaan baru $(1 + A^3)dx - 3A^2(Adx + xdA) = 0$ $\Leftrightarrow (1 - 2A^3)dx - x(3A^2)dA = 0$ $\Leftrightarrow \frac{3A^2}{(1 - 2A^3)}dA - \frac{dx}{x} = 0$ $\Leftrightarrow \int \frac{3A^2dA}{(1 - 2A^3)} - \int \frac{dx}{x} = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-6A^2dA}{(1 - 2A^3)} - \int \frac{dx}{x} = 0$

	$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left\|1-2A^3\right\| - \ln\|x\| = c$ $\Leftrightarrow \ln\left\|1-2A^3\right\| + 2\ln\|x\| = c$ $\Leftrightarrow \ln\left\|1-2\frac{y^3}{x^3}\right\| + 2\ln\|x\| = c$ $\Leftrightarrow \ln\left\|\left(\frac{x^3-2y^3}{x^3}.x^2\right)\right\| = c$ $\Leftrightarrow \frac{x^3-2y^3}{x} = c$ Berdasarkan uraian di atas, selesaian umum persamaan $(x^3+y^3)dx - 3xy^2dy = 0$ adalah $\frac{x^3-2y^3}{x} = c$
4.	Tentukan selesaian umum persamaan $(3x-2y)\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \; dengan \; y(1) = 1$ Persamaan di atas adalah persamaan diferensial homogen, karena M(x,y) dan N(x,y) adalah fungsi homogen berderajat sama yaitu satu. $(3x-2y)\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ $\Leftrightarrow 3ydx - (3x-2y)dy = 0$ $\Leftrightarrow \left(3\frac{x}{y} - 2\right)dy - 3dx = 0$ Dengan transformasi $x = uy \; dan \; dx = udy + ydu$ $\Leftrightarrow (3u-2)dy - 3(udy + ydu) = 0$ $\Leftrightarrow (3u - 2 - 3u)dy - 3ydu = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2dy}{y} + 3du = 0$

	$\Leftrightarrow \int \frac{2dy}{y} + \int 3du = c$ $\Leftrightarrow 2 \ln\|y\| + 3u = c$ $\Leftrightarrow \ln y^2 = c - 3u$ $\Leftrightarrow y^2 = e^{c-u}$ $\Leftrightarrow y^2 = \frac{c}{e^{\frac{3y}{x}}}$ Karena $y(1) = 1$ maka $1^2 = \frac{c}{e^{\frac{3.1}{1}}}$ didapat $c = 3$ sehingga selesaiannya dinamakan selesaian khusus (*integral khusus*) yaitu $y^2 e^{\frac{3y}{x}} = 3$

Latihan soal

1. Selidiki apakah fungsi berikut homogen, jika homomogen tentukan derajatnya.
   a. $f(x, y) = x + 2y$
   b. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$
   c. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{3xy}$
   d. $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos^2(xy)$
   e. $f(x, y) = xy - y^2 + 3x^2$
   f. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
   g. $f(x, y) = x + y \cos x$
   h. $f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
   i. $f(x, y) = \sqrt{\frac{2}{x + y}}$

j. $f(x,y) = \dfrac{x\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)}{y}$

k. $f(x,y) = \dfrac{x-3}{y} + \dfrac{5y+9}{3y}$

2. Tentukan selesaian persamaan diferensial homogen berikut ini.

   a. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{3xy}$

   b. $(3x - y)\dfrac{dy}{dx} = 3y$

   c. $2x(y + 2x)\dfrac{dy}{dx} = y(4x - y)$

   d. $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = 0$

   e. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \tan\dfrac{y}{x}$

   f. $(2x - 5y)dx + (4x - y)dy = 0$, dengan $y(2) = 1$

   g. $(x - y)dx + xdy = 0$, dengan $y(0) = 0$

   h. $y' = \dfrac{xy}{(3x^2 - y^2)}$ dengan $y(2) = 1$

   i. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y}$ dengan $y(1) = 3$

   j. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{xt}{x^2 + t^2}$, *dengan* $y(0) = 0$

3. $y^2 dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ dengan $y(2) = 1$

4. Tunjukkan bahwa persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah persamaan diferensial homogen berderajat satu jika dan hanya jika $M(x,y)$ *dan* $N(x,y)$ fungsi homogen berderajat-1.

5. Tentukan semua selesaian dari persamaan

$$x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{4x^2-y^2},\ untuk\ x>0$$

6. Tentukan semua selesaian dari persamaan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{16x^2-y^2}+y}{x}\ untuk\ x>0$$

2.3 Persamaan $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ Linear, tetapi Tidak Homogen

Persamaan diferensial tingkat satu derajat satu, disebut persamaan diferensial linear tidak homogen jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ dalam $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ adalah fungsi linear. Sehingga bentuk umum semula dapat diubah menjadi $(ax+by+c)dx+(px+qy+r)dy=0$

Contoh:

1. $(x+y+2)dx+(2x+2y+4)dy=0$
2. $(x+y+1)dx+(2x+2y+3)dy=0$
3. $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$
4. $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$

Berdasarkan contoh di atas, maka persamaan diferensial tidak homogen dengan $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ fungsi linear dapat dikelompokkan menjadi 3 jenis yaitu:

a) Bentuk $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\lambda$, λ (*parameter*), sehingga diperoleh

   $a=\lambda p, b=\lambda q, c=\lambda r$

   Contoh

   $(x+y+2)dx+(2x+2y+4)dy=0$

b) Bentuk $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\lambda,\ tetapi \neq \frac{c}{r}$

   Sehingga $a=\lambda p, b=\lambda q$

Contoh

$(x+y+1)dx+(2x+2y+3)dy=0$

$(3x+2y+1)dx+(3x+2y-4)dy=0$

c) Bentuk selain a) dan b) di atas.

$(3y-7x+7)dx+(7y-3x-3)dy=0$

$(3x-2y+7)dx+(3y+2y)dy=0$

Karena bentuknya berbeda-beda, maka selesaian umum persamaan diferensial linear tidak homogen harus menyesuaikan dengan bentuknya.

a. Bentuk $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\lambda$

Karena $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\lambda$ maka diperoleh

$a=\lambda p, b=\lambda q, c=\lambda r$ Sehingga persamaan semula

$(ax+by+c)dx+(px+qy+r)dy=0$

$\Leftrightarrow (\lambda px+\lambda qy+\lambda r)dx+(px+qy+r)dy=0$

$\Leftrightarrow \lambda(px+qy+r)dx+(px+qy+r)dy=0$

$\Leftrightarrow \lambda dx+dy=0$

$\Leftrightarrow \int \lambda\, dx+\int dy=c$

$\Leftrightarrow \lambda x+y=c$ (persamaan linear)

Contoh

1.	Tentukan selesaian persamaan diferensial $(x+y+4)dx+(2x+2y+8)dy=0$ Jawab Karena $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\frac{1}{2}$ maka diperoleh $p=2a, q=2b, r=2c$ Sehingga persamaan semula $(x+y+4)dx+(2x+2y+8)dy=0$

	$\Leftrightarrow (x+y+4)dx+2(x+y+4)dy=0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}dx+dy=0$ $\Leftrightarrow \int \frac{1}{2}dx+\int dy=c$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+y=c$ $x+2y=c$ adalah primitif yang diminta
2.	Tentukan selesaian persamaan $(3x+3y+6)dx+(x+y+3)dy=0$ Jawab Karena $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=3$ maka diperoleh $a=3a, b=3q, c=3r$ Sehingga persamaan semula $(3x+3y+6)dx+(x+y+3)dy=0$ $\Leftrightarrow 3(x+y+2)dx+(x+y+3)dy=0$ $\Leftrightarrow 3dx+dy=0$ $\Leftrightarrow \int 3dx+\int dy=c$ $\Leftrightarrow 3x+y=c$ Primitif persamaan di atas adalah $3x+y=c$

b. Bentuk $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\lambda, tetapi \neq \frac{c}{r}$.

Persamaan bentuk $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\lambda$ dapat diselesaikan dengan cara menggunakan transformasi $ax+by=u$ *atau* $px+qy=v$. Berdasarkan transformasi tersebut, dengan mendiferensialkan masing-masing variabel, sehingga diperoleh:

$d(ax)+d(by)=d(u)$

$\Leftrightarrow adx+bdy=du$

$\Leftrightarrow adx = du - bdy$

$\Leftrightarrow dx = \dfrac{du - bdy}{a}$ atau

$\Leftrightarrow adx + bdy = du$

$\Leftrightarrow bdy = du - adx$

$\Leftrightarrow dy = \dfrac{du - adx}{b}$

Dengan cara yang sama jika yang digunakan transformasi $px + qy = v$, diperoleh bentuk

$dy = \dfrac{dv - pdx}{q}$ atau $dx = \dfrac{dv - pdx}{p}$

Pilih dx atau dy akan tetapi tidak keduanya, dan substitusikan ke persamaan diferensial semula.

$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$

$\Leftrightarrow (u + c)dx + \left(\dfrac{1}{\lambda}u + r\right)dy = 0$

$\Leftrightarrow (u + c)\left(\dfrac{du - bdy}{a}\right) + \left(\dfrac{1}{\lambda}u + r\right)dy = 0$

Atau

$\Leftrightarrow (u + c)dx + \left(\dfrac{1}{\lambda}u + r\right)\left(\dfrac{du - adx}{b}\right) = 0$

Persamaan di atas adalah persamaan yang dapat direduksi ke persamaan diferensial dengan variable terpisah (*separable*).

Contoh:

1.	Tentukan selesaian persamaan diferensial $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 3)dy = 0$ dengan $y(0) = 0$ Jawab Dari persamaan $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 3)dy = 0$, diperoleh $a = 1, b = 1, c = 1, \ p = 2, q = 2$, $dan\ r = 2$, sehingga diperoleh $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Selanjutnya gunakan transformasi

$x+y=u \; atau \; 2x+2y=v$

Jika transformasi yang digunakan $x+y=u$ maka diperoleh

$(u+1)dx+(2u+3)dy=0$.

Selanjutnya bentuk transformasi $x+y=u$ didiferensialkan

$dx+dy=du$ dan diperoleh $dx=du-dy$ atau $dy=du-dx$.

Cara I

$(u+1)dx+(2u+3)dy=0$.

$\Leftrightarrow (u+1)(du-dy)+(2u+3)dy=0$

$\Leftrightarrow (u+1)du+(2u+3-u-1)dy=0$

$\Leftrightarrow (u+1)du+(u+2)dy=0$ direduksi menjadi PD Separable, diperoleh:

$$dy+\left(\frac{u+1}{u+2}\right)du=0$$

$$\Leftrightarrow \int dy+\int\frac{u+1}{u+2}du=c$$

$$\Leftrightarrow \int dy+\int 1du-\int\frac{1}{u+2}du=c$$

$$\Leftrightarrow y+u-\ln|u+2|=c$$

$$\Leftrightarrow y+(x+y)-\ln|x+y+2|=c$$

$$\Leftrightarrow x+2y+c=\ln|x+y+2|$$

$$\Leftrightarrow x+2y+c=y+u-\ln|u+2|=c$$

$$\Leftrightarrow e^{(x+2y+c)}=x+y+2$$

Karena y(0) = 0, maka selesaian khusus persamaan

$(x+y+1)dx+(2x+2y+3)dy=0$ adalah $e^{(x+2y+\ln 2)}=x+y+2$

Cara II

$(u+1)dx+(2u+3)(du-dx)=0$

$\Leftrightarrow (u+1-2u-3)dx+(2u+3)du=0$

	$\Leftrightarrow (-u-2)dx+(2u+3)du=0$ $\Leftrightarrow (u+2)dx-(2u+3)du=0$ $\Leftrightarrow dx-\left(\frac{2u+3}{u+2}\right)du=0$ $\Leftrightarrow \int dx-\int\frac{2u+3}{u+2}du=c$ $\Leftrightarrow \int dx-\int 1du+\int\frac{1}{u+2}du=c$ $\Leftrightarrow x-u+\ln\|u+2\|=c$ $\Leftrightarrow x-(x+y)+\ln\|x+y+2\|=c$ $\Leftrightarrow \ln\|x+y+2\|=c+y$ $\Leftrightarrow (x+y+2)=e^{c+y}$ Karena $y(0)=0$ maka didapat $c=\ln 2$ sehingga selesaian khusus persamaan diferensial di atas adalah $(x+y+2)=e^{\ln 2+y}$
2.	Tentukan selesaian persamaan $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$ Jawab Transformasikan $3x+2y=u$ *sehingga* $3dx+2dy=du$ dan diperoleh: $dx=\frac{du-2dy}{3}$ *atau* $dy=\frac{du-3dx}{2}$ akibatnya persamaan $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$ dapat dinyatakan dalam bentuk $(u+1)dx-(u-1)dy=0$ Pilih dx atau dy, lalu substitusikan ke dalam persamaan dan diperoleh $(u+1)\left(\frac{du-2dy}{3}\right)-(u-1)dy=0$ $\Leftrightarrow (u+1)(du-2dy)-3(u-1)dy$ $\Leftrightarrow (u+1)du-(2u+2+3u-3)dy=0$

	$\Leftrightarrow \frac{u+1}{5u-1}du - dy = 0$ $\Leftrightarrow \int \frac{u+1}{5u-1}du - \int dy = c$ $\Leftrightarrow \int \frac{1}{5}du + \frac{6}{25}\int \frac{5}{5u-1}du - \int dy = c$ $\Leftrightarrow \frac{u}{5} + \frac{6}{25}\ln\|5u-1\| - y = c$ $\Leftrightarrow \frac{3x+2y}{5} + \frac{6}{25}\ln\|5(3x+2y)-1\| - y = c$

Bentuk yang ketiga adalah selesaian bentuk selain persamaan 1 dan 2. Dalam menentukan selesaiannya gunakan transformasi

$(ax+by+c)=u \quad dan \; (px+qy+r)=v$

Selanjutnya diferensial kan kedua bentuk transformasi di atas sehingga diperoleh

$d(ax)+d(by)+d(c)=d(u) \; dan \; d(px)+d(qy)+d(r)=d(v)$

$adx+bdy=du \; dan \; pdx+qdy=dv$

Eleminasikan dx dan dy pada hasil differesial yang diperoleh secara berurutan yaitu:

$$\begin{cases} adx+bdy=du \\ pdx+qdy=dv \end{cases}$$

selanjutnya kalikan persamaan pertama dengan p dan kalikan persamaan kedua dengan a, maka diperoleh:

$$\begin{array}{l} apdx+pbdy=pdu \\ apdx+aqdy=adv \\ \hline (pb-aq)dy=pdu-adv \end{array} \; -$$

$$dy=\frac{pdu-adv}{bp-aq}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp}$$

Substisusikan dx dan dy dalam persamaan semula, yaitu:

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow u\,\frac{qdu - bdv}{aq - bp} + v\,\frac{pdu - adv}{bp - aq} = 0$$

Persamaan di atas menjadi persamaan baru dengan tanda diferensial du dan dv, dan termasuk dalam persamaan diferensial homogen. Primitifnya dapat ditentukan dengan menggunakan metode persamaan diferensial homogen.

Contoh

1.	Tentukan selesaian umum persamaan $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$ Jawab Transformasikan $u = 3y - 7x + 7 \; dan \; v = 7y - 3x + 3$ Dengan mendiferensialkan masing-masing bagian, diperoleh: $du = 3dy - 7dx \; dan \; dv = 7dy - 3dx$ Elimasikan dx dan dy berurutan, diperoleh: $\begin{cases} 3dy - 7dx = du \\ 7dy - 3dx = dv \end{cases}$ atau $\begin{cases} 9dy - 21dx = 3du \\ 49dy - 21dx = 7dv \end{cases}$ didapat $-40dy = 3du - 7dv$ $dy = \frac{7dv - 3du}{40}$ Dengan cara yang sama diperoleh

	$dx = \dfrac{3dv - 7du}{40}$ Substitusikan $dy\ dan\ dx$ kepersaman semula, sehingga diperoleh $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$ $u\left(\dfrac{3dv - 7du}{40}\right) + v\left(\dfrac{7dv - 3du}{40}\right) = 0$ $\Leftrightarrow 40u(3dv - 7du) + 40v(7dv - 3du) = 0$ (persamaan diferensial homogen) $\Leftrightarrow (3u + 7v)dv - (7u + 3v)du = 0$ Bagi persamaan dengan v, diperoleh $\left(3\dfrac{u}{v} + 7\right)dv - \left(7\dfrac{u}{v} + 3\right)du = 0$ Transformasikan $t = \dfrac{u}{v}\ atau\ u = vt$ sehingga $du = vdt + tdv$ Persamaan di atas adalah persamaan diferensial yang dapat direduksi ke persamaan variable terpisah. $(3dt + 7)dv - (7t + 3)(vdt + tdv) = 0$ $\Leftrightarrow (3t + 7 - 7t^2 - 3t)dv - (7t + 3)dt = 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{dv}{v} - \dfrac{(7t + 3)}{(7 - 7t^2)}dt = 0$ $\Leftrightarrow \int \dfrac{dv}{v} - \int \dfrac{7t + 3}{7 - 7t^2}dt = c$ $\Leftrightarrow \ln\lvert v\rvert - \dfrac{1}{2}\ln\lvert 1 - t^2\rvert + \dfrac{3}{7}\ln\left\lvert\dfrac{1 + t}{1 - t}\right\rvert = 0$ Dengan mensubstitusi $v = 7y - 3x + 3\ dan\ t = \dfrac{7y - 3x + 3}{3y + 7x + 7}$ diperoleh selesaian umum persamaan $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$
2.	Tentukan selesaian umum persamaan $(3x - 2y + 1)dx - (3x + 2y)dy = 0$ Jawab.

	Transformasikan $u = 3x - 2y + 1 \; dan \; v = 3x + 2y$ $du = 3dx - 2dy \; dan \; dv = 3dx + 2dy$ Selanjutnya dieliminasi dx dan dy berturut dan diperoleh: $dy = \frac{dv - du}{4}$ dan $dx = \frac{du + dv}{6}$ Substitusikan dy dan dx ke persamaan semula dan diperoleh $(3x - 2y + 1)dx - (3x + 2y)dy = 0$ $\Leftrightarrow u\left(\frac{du + dv}{6}\right) - v\left(\frac{dv - du}{4}\right) = 0$ $\Leftrightarrow 4u(du + dv) - 6v(dv - du) = 0$ $\Leftrightarrow (4u + 6v)du + (4u - 6v)dv = 0$ $\Leftrightarrow \left(4 + 6\frac{v}{u}\right)du + \left(4 - 6\frac{v}{u}\right)dv = 0$ Transformasikan $p = \frac{v}{u} \to v = up$ sehingga $dv = udp + pdu$ Substitusikan kepersamaan di atas, diperoleh $(4 + 6p)du + (4 - 6p)9udp + pdu) = 0$ $\Leftrightarrow (4 + 6p + 4p - 6p^2)du + (4 - 6p)udp = 0$ $\Leftrightarrow \frac{du}{u} + \frac{(4 - 6p)dp}{(4 + 10p - 6p^2)} = 0$ $\Leftrightarrow \int \frac{du}{u} - \int \frac{4 - 6p}{(6p + 2)(p - 2)} dp = c$ $\Leftrightarrow \ln\|u\| - \int \frac{4 - 6p}{(6p + 2)(p - 2)} dp = c$ $\Leftrightarrow \ln\|3x - 2y + 1\| + \frac{18}{5}\ln\|6p + 2\| + \frac{8}{5}\ln\|p - 2\| = c$ $\Leftrightarrow \ln\|3x - 2y + 1\| + \frac{18}{5}\ln\left\|6\left(\frac{3x + 2y}{3x - 2y + 1}\right) + 2\right\| + \frac{8}{5}\ln\left\|\left(\frac{3x + 2y}{3x - 2y + 1}\right) - 2\right\| = c$

2.4 Persamaan Diferensial Eksak (PDE)

Persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut persamaan diferensial eksak jika dan hanya jika memenuhi syarat:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Contoh

1. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ adalah persamaan diferensial eksak karena

$$M(x,y) = x + y \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$N(x,y) = x - y \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = 1$$

sehingga $\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

2. $(x + y\cos x)dx + \sin x dy = 0$, adalah persamaan diferensial eksak karena

$$M(x,y) = x + y\cos x \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x$$

$$N(x,y) = \sin x \rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos x$$

Sehingga $\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

3. $y(x-2y)\ dx - x^2\ dy = 0$, bukan persamaan diferensial eksak,

$$M(x,y) = y(x-2y) \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x - 4y$$

$$N(x,y) = -x^2 \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = -2x$$

sehingga $\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ maka persamaan di atas bukan persamaan diferensial eksak.

Dengan cara yang sama, persamaan dibawah ini adalah persamaan tidak eksak karena $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

1. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ ....persamaan diferensial homogen
2. $dx - \sqrt{a^2 - x^2}dy = 0$ .... persamaan diferensial yang dapat direduksi ke persamaan diferensial variabel terpisah.
3. $(x + y + 1)dx - (x - y + 3)dy = 0$ ………..persamaan diferensial tidak homogen

Persamaan diferensial eksak mempunyai selesaian umum $F(x,y) = c$

Menurut definisi diferensial total untuk $F(x,y) = c$, diperoleh:

$$dF(x,y) = d(c)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

Berdasarkan bentuk

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dan $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = 0$ maka diperoleh

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Berdasarkan kesamaan di atas, maka untuk menentukan selesaian persamaan diferensial eksak yang berbentuk $F(x,y) = c$ dapat dilakukan dengan dua cara.

Cara I

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Dari kesamaan di atas diperoleh

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)dx$$

$$= \int^{x} M(x,y)\,dx + G(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\int^{x} M(x,y)dx + G(y) \right) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx + G'(y) = N(x,y)$$

$$G'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx$$

$$G(y) = \int \left\{ N(x,y)dx - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx \right\} dy$$

Substitusikan G(y) dalam $F(x,y) = \int^{x} M(x,y)dx + G(y)$ yang merupakan

selesaian umum persamaan diferensial

Cara II

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\ dan\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

Dari kesamaan di atas diperoleh

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy \rightarrow F(x,y) = \int^{y} N(x,y)dy + H(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\int^{y} N(x,y)dy + H'(x) = M(x,y)$$

$$H'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$$

$$H(x) = \int \left(M(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int N(x,y)dy \right) \right) \mathrm{dx}$$

Substitusikan H(x) ke persamaan semula $F(x,y)=\int^{y} N(x,y)+H(x)$

Contoh

1.	Tentukan selesaian persamaan diferensial eksak berikut ini: $(2x+3y+4)dx+(3x+4y+5)dy=0$ Jawab $M(x,y)=2x+3y+4 \;\rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=3$ dan $N(x,y)=3x+4y+5 \;\rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=3$ berarti persamaan di atas adalah eksak. Selesaian PD di atas adalah $F(x,y)=c$. Untuk mendapatkan $F(x,y)=c$ dapat digunakan kesamaan $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\ dan\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$. $\Leftrightarrow \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=3x+4y+5$ $\Leftrightarrow F(x,y)=\int(3x+4y+5)dy$ $=3xy+2y^2+5y+f(x)$ $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ $\Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3xy+2y^2+5y+f(x)\right)=2x+3y+4$ $\Leftrightarrow 3y+f'(x)=2x+3y+4$ $\Leftrightarrow f'(x)=2x+4$ $\Leftrightarrow f(x)=x^2+4x+c$ Sehingga primitif persamaan adalah $F(x,y)=3xy+2y^2+5y+x^2+4x+c$
2.	$(x+y\cos x)dx+\sin x dy=0$

	Jawab $M(x,y) = x + y\cos x \rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x$ $N(x,y) = \sin x \rightarrow \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos x$ Berarti persamaan di atas adalah persamaan diferensial eksak. Sehingga selesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk F(x,y) = c. Untuk mendapatkan F(x,y) = c digunakan kesamaan $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \;\; dan \;\; \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x + y\cos x \rightarrow F(x,y) = \int (x + y\cos x)dx$ $= \dfrac{1}{2}x^2 + y\sin x + G(y)$ $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sin x \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{1}{2}x^2 + y\sin x + G(y)\right\} = \sin x$ $\Leftrightarrow \sin x + G'(y) = \sin x$ $\Leftrightarrow G'(y) = 0$ $\Leftrightarrow G(y) = c$ Diperoleh selesaian umum persamaan $F(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + y\sin x + c \Leftrightarrow x^2 + 2y\sin x = c$

Soal-soal

A. Selidiki apakah persamaan di bawah ini eksak atau tidak

1. $(3x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$
2. $(y^2 + 3)dx + (2xy - 4)dy = 0$
3. $(6xy + 2y^2 - 5)dx + (3x^2 + 4xy - 6)dy = 0$
4. $\left(\dfrac{2x-1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{x - x^2}{y^2}\right)dy = 0$

5. $(\cos x \cos y + y)y' + \tan x = \sin x \sin y$

6. $(5xy + 4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

7. $xdx + ydy = (x^2 + y^2)dx$

8. $3\left(y^2 - \dfrac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\dfrac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0$

9. $2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

10. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(\dfrac{4x+1}{y^3}\right)dy = 0$

B. Tentukan selesaian umum persamaan diferensial eksak berikut ini:

1. $2xydx + (x^2 + 3)dy = 0$

2. $\left(\dfrac{xy-1}{x}\right)dy + \left(\dfrac{xy+1}{y}\right)dy = 0$

3. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 0$

4. $(y^2 - 2x)\ dx + 2xy\ dy = 0$

5. $(1 + \ln|xy|)dx + \dfrac{x}{y}dy = 0$

6. $(y\cos(xy) - \sin x)dx - x\cos(xy)dy = 0$

7. $(2xy + \cos y)dx + (x^2 - x\sin y - 2y)dy = 0$

8. $(3x^2 \ln x + x^2 - y)dx - xdy = 0\ dan\ y(1) = 5$

9. $2x^2 \dfrac{dy}{dx} + 4xy = 3\sin x\ dan\ y(2\pi) = 0$

10. $(ye^{xy} + \cos x)dx - xe^{xy}dy = 0 \; dan \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

2.6 Persamaan Diferensial Tidak Eksak (PDTE)

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ adalah persamaan diferensial tingkat satu derajat satu disebut persamaan diferensial tidak eksak jika dan hanya jika:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Persamaan diferenisal tidak eksak dapat diselesaikan dan ditentukan primitifnya dengan cara mencari faktor integral dari persamaan tersebut. Setelah ditentukan faktor integralnya, maka persamaan diferensial tidak eksak tersebut menjadi persamaan diferensial eksak. Faktor integral persamaan diferensial tidak eksak dinyatakan dengan ψ (x,y). Setelah diketahui faktor integralnya , maka persamaan tidak eksak ditulis dalam bentuk:

$\psi(x, y)\big(M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0\big)$

$\Leftrightarrow \psi(x, y)M(x, y)dx + \psi(x, y)N(x, y)dy = 0$

$\Leftrightarrow M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \; \rightarrow$ *persamaan diferensial tingkat satu derajat satu*

Dengan

$M(x, y) = \psi(x, y)M(x, y) \; dan \; N(x, y) = \psi(x, y)N(x, y)$

Sehingga diperoleh persamaan yang merupakan persamaan diferensial tingkat satu berupa persamaan diferensial eksak yang memenuhi sifat

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

dengan

$M(x, y) = \psi(x, y)M(x, y) \; dan \; N(x, y) = \psi(x, y)N(x, y)$

Persamaan baru tersebut dinamakan persamaan diferensial eksak, sehingga selesaiannya dapat ditentukan dengan menggunakan metode persamaan diferensial eksak.

Bagaimana menentukan faktor integral persamaan tidak eksak?

Karena $\psi(x,y)\big(M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\big)$ persamaan eksak, maka:

$$\frac{\partial(\psi M)}{\partial y} = \frac{\partial(\psi N)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \psi\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \psi\frac{\partial M}{\partial y} - \psi\frac{\partial N}{\partial x} = \left(N\frac{\partial \psi}{\partial x} - M\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\psi}\left(N\frac{\partial \psi}{\partial x} - M\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

dalam hal ini dapat kita tinjau dari beberapa kasus:

a. Misal $\psi(x,y) = \psi(x)$ yaitu fungsi bervariabel x saja, maka $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ dan

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dx}$, sehingga

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\psi}\left(N\frac{d\psi}{dx} - M.0\right)$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Jika $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ suatu fungsi dari x atau $f(x)$, maka dari

$\dfrac{1}{\psi}\dfrac{d\psi}{dx} = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ didapat

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} = f(x) \; atau \; \frac{d\psi}{\psi} = f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d\psi}{\psi} = \int f(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|\psi| = \int f(x)\, dx$$

$\Leftrightarrow \psi = e^{\int f(x)dx}$ adalah faktor integral yang dicari

b. Misal $\psi = \psi(y)$ yaitu fungsi bervariabel y saja maka $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ dan

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} \quad = \frac{d\psi}{dy}$, sehingga

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\psi}\left(N\frac{\partial \psi}{\partial x} - M.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\psi}\left(N.0 - M.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

Jika $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ suatu fungsi dari y atau $g(y)$, maka dari

$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ didapat

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy} = -q(y) \; atau \; \frac{d\psi}{\psi} = -g(y)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d\psi}{\psi} = \int -g(y)dy$$

$$\Leftrightarrow \ln|\psi| = -\int g(y)dy$$

$\psi = e^{\int -g(y)dy}$ adalah faktor integral yang dicari

c. Jika $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah persamaan diferensial homogen dengan $xM(x,y)dx + yN(x,y)dy \neq 0$ maka faktor integral

$$\psi(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}$$

d. Jika $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dapat ditulis $yF(xy)dx + xF(xy)dy = 0$ dengan $f(xy) \neq g(xy)$ maka

$$\psi(x,y) = \frac{1}{xy(F(xy) - G(xy))} = \frac{1}{xM(x,y) - yN(x,y)}$$

e. Seringkali faktor integral $\psi(x,y)$ dapat diperoleh dengan pemeriksaan, hal ini akan tampak setelah pengelompokkan kembali suku-suku persamaannya.

Dengan mengenal kelompok suku-suku tertentu merupakan suatu bagian dalam persamaan diferensial eksak.

Contoh

1.	Tentukan selesaian umum persamaan diferensial berikut dengan terlebih dahulu menentukan faktor integrasinya. $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ Jawab $M(x,y) = x^2 + y^2 + x \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y$ $N(x,y) = xy \rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y$ Sehingga persamaan di atas tidak eksak karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ Selanjutnya dicari ψ (x,y) sebagai faktor integrxasi

	Karena $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\dfrac{2y-y}{xy}=\dfrac{1}{x}=f(x)$ Maka $\psi(x,y)=e^{\int f(x)dx}=e^{\ln x}=x$. Diperoleh persamaan baru dan merupakan persamaan diferensial eksak yaitu $x\{(x^2+y^2+x)dx+xydy=0\}$ $\Leftrightarrow \{(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2ydy=0\}$ Dengan menggunakan metode persamaan eksak diperoleh selesaian $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$ yaitu $3x^4+4x^3+6x^2y^2=0$
2.	Tentukan selesaian umum persamaan $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$ Jawab $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=(8xy^3e^y+2xy^4)+6xy^2+1$ $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3$ Sehingga persamaan di atas tidak eksak. Selanjutnya dicari ψ (x,y) sebagai faktor integrasi Karena $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\dfrac{2}{y}=-g(y)$ Maka $\psi=e^{\int -g(y)dy}=\dfrac{1}{y^4}$ Diperoleh persamaan baru dan merupakan persamaan diferensial eksak yaitu $\left(\dfrac{2xy^4e^y+2xy^3+y}{y^4}\right)dx+\left(\dfrac{x^2y^4e^y-x^2y^2-3x}{y^4}\right)dy=0$ Dengan menggunakan metode persamaan eksak diperoleh selesaian persamaan $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$ adalah

	$x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$

Latihan

A. Tentukan faktor integral persamaan berikut:

1) $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$
2) $y(x - 2y)dx - x^2dy = 0$
3) $xdy - ydx = x^2e^x dx$
4) $y^2dy + ydx - xdy = 0$
5) $3x^2y^2dx + 4(x^3y - 3)dy = 0$

B. Berdasarkan faktor integrasi yang diperoleh tentukan selesaian persamaan:

1) $(xy - 1)dx + x^2dy = 0$
2) $ydx - (2x + y^4)dy = 0$
3) $(y - x^2)\ dx + 2xydy = 0, x > 0$
4) $(3xy - 2y^{-1})dx + x(x + y^{-2})dy = 0$
5) $x^2ydx + y(x^3 + e^{-3y}\sin y)dy = 0$

C. Buktikan bahwa jika $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, adalah fungsi y saja, maka faktor integrasi untuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ adalah $f(y) = e^{\int -g(y)dy}$

2.7 Persamaan Berbentuk $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$

Persamaan $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ juga disebut persamaan diferensial tingkat satu derajat satu karena bentuknya $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Selesaiannya dapat ditentukan dengan menggunakan transformasi $xy = z$ sehingga $y = \frac{z}{x}$. Dengan menurunkan masing-masing variable diperoleh

$dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}.$

Substitusikan bentuk $dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$ ke persamaan semula

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

$\Leftrightarrow M\left(x, \frac{z}{x}\right)dx + N\left(x, \frac{z}{x}\right)\left(\frac{xdz - zdx}{x^2}\right) = 0$

Dengan cara penyederhanaan diperoleh persamaan baru yang bentuk umumnya adalah $M(x, z)dx + N(x, z)dz = 0$ dan persamaan bentuk tersebut merupakan persamaan yang dapat dipisahkan variabel-variabelnya.

Contoh.

1.	Tentukan selesaian umum persamaan $(xy^2 + y)dx + (x + x^2 + x^3y^2)dy = 0$ Jawab $(xy^2 + y)dx + (x + x^2 + x^3y^2)dy = 0$ $\Leftrightarrow y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0$ Transformasikan $y = \frac{z}{x}$, dengan menurunkan masing-masing variable diperoleh $dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$. Sehingga persamaan semula menjadi $\frac{z}{x}(z + 1)dx + x(1 + z + z^2)\left(\frac{xdz - zdx}{x^2}\right) = 0$ $\Leftrightarrow x^3dx - x(1 + z + z^2)dz = 0$ $\Leftrightarrow \frac{dx}{x} - \left(\frac{1 + z + z^2}{z^3}\right)dz = 0$ $\Leftrightarrow \frac{dx}{x} - \frac{dz}{z^3} - \frac{dz}{z^2} + \frac{dz}{z} = 0$

	$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{z^3} - \int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dz}{z} = c$ $\Leftrightarrow \ln\lvert x\rvert - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \ln\lvert z\rvert = c$ Dengan mensubstitusikan xy = z diperoleh selesaian persamaan $2x^2y^2 \ln\lvert y\rvert - 2xy - 1 = cx^2y^2$
2.	Sebagai latihan bagi pembaca, tentukan selesaikan persamaan di bawah ini dengan menggunakan cara seperti contoh 1 di atas. Sebagai latihan, tentukan selesaian umum persamaan 1) $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$ 2) $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$ 3) $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$ dengan y(1) = 0 4) $y(1+2xy)dx + x(1-xy)dy = 0$ dengan y(0) = 0 5) $y(1-xy)dx + x(xy+3)dy = 0$

2.8 Trayektori

Suatu kurva yang memotong setiap persamaan keluarga kurva atau dari sebaliknya dengan sudut tetap α disebut trayektori α dari persamaan diferensial yang diketahui. Jika besar sudut $\alpha = 90^o$ maka disebut trayektori ortogonal, sedangkan jika besar sudut $\alpha \neq 90^o$ maka disebut trayektori isogonal.

a. Trayektori Isogonal

Integral kurva dari persamaan $f\left(x, y, \frac{y' - \tan\alpha}{1 + y'\tan\alpha}\right) = 0$ adalah trayektori isogonal dengan sudut tetap α dari persamaan diferensial $f(x, y, y') = 0$

b. Trayektori Ortogonal

Jika $\alpha = 90^{\circ}$ maka trayektorinya disebut trayektori ortogonal Integral kurva dari persamaan diferensial $f\left(x, y, \frac{1}{y'}\right) = 0$ adalah trayektori orthogonal dari persamaan $f(x, y, y') = 0$

Jika dinyatakan dalam koordinat polar, integral kurva dari persamaan diferensial $f\left(r, \theta, r^2 \frac{dr}{d\theta}\right) = 0$ adalah trayektori ortogonal dari integral kurva $f\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0$

Jika suatu persamaan hendak ditentukan trayektorinya, maka beberapa langkah yang ditempuh adalah.

1. Tentukan persamaan diferensial dari persamaan keluarga kurva yang diketahui . Jika persamaan yang diketahui masih terdapat parameter λ maka parameter λ harus dieliminir terlebih dahulu.
2. Tentukan persamaan diferensial dari trayektorinya.
   a. Bila trayektorinya ortogonal dilakukan penggantian $\frac{dy}{dx}$ dengan - $\frac{dx}{dy}$ pada persamaan diferensial nya.
   b. Bila trayektori isogonal dengan sudut tetap α maka lakukan penggantian $\frac{dy}{dx}$ dengan $\dfrac{\frac{dy}{dx} - \tan\alpha}{1 + \frac{dy}{dx}\tan\alpha}$ pada persamaan diferensial nya.
   c. Bila trayektori α = 45º maka lakukan penggantian $\frac{dy}{dx}$ dengan $\dfrac{\frac{dy}{dx} - 1}{1 + \frac{dy}{dx}}$ pada persamaan diferensial nya.

d. Bila trayektorinya dalam koordinat polar maka lakukan penggantian $\frac{dr}{d\theta}$ dengan $-r^2\frac{dr}{d\theta}$.

3. Selesaikan persamaan diferensial baru tersebut dengan metode yang sesuai sehingga diperoleh persamaan trayektori yang diminta.

Contoh

1.	Tentukan trayektori ortogonal persamaan keluarga kurva $x^2+2y^2=c\ dengan\ c\in real$ Jawab Persamaan diferensial dari persamaan $x^2+2y^2=c$ adalah $d(x^2)+d(2y^2)=d(c)$ $\Leftrightarrow 2xdx+4ydy=0$ $\Leftrightarrow 2x+4y\frac{dy}{dx}=0$ Untuk mendapatkan trayektori ortogonal adalah mengganti $\frac{dy}{dx}$ dengan - $\frac{dx}{dy}$, sehingga $\Leftrightarrow 2x+4y\frac{dy}{dx}=0$ $\Leftrightarrow 2x+4y\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$ $\Leftrightarrow 2xdy-4ydx=0$ $\Leftrightarrow 2\frac{dy}{y}-4\frac{dx}{x}=0$ $\Leftrightarrow 2\int\frac{dy}{y}-4\int\frac{dx}{x}=c$ $\Leftrightarrow 2\ln\|y\|-4\ln\|x^4\|=c$ $\Leftrightarrow \ln y^2-\ln x^4=c$

	$\Leftrightarrow \ln\left\|\frac{y^2}{x^4}\right\| = c$ $\Leftrightarrow y^2 = cx^4$
2.	Sebagai latihan bagi pembaca, Tentukan trayektori ortogonal dari persamaan keluarga kurva 1) $(x^2 + y^2) - 2cx = 0$ 2) $y^2 + 3x^2 - cx = 0$ 3) $y^2 - x^2 - c = 0$ 4) $(x^2 + y^2)^2 = cxy$ 5) $y^2 = x - 1 + ce^{-x}$ 6) $r = c\cos\theta$ 7) $y^2 = \frac{x^2}{c - x}$ 8) Tentukan trayektori isogonal dengan sudut tetap α = 45º dari persamaan keluarga kurva a. $x^2 + y^2 = 2c(x + y)$ b. $x^2 + y^2 = c^2$

2.9 Soal-soal

A. Dengan menggunakan metode yang sesuai, tentukan selesaian umum persamaan diferensial di bawah ini.

1. $y' = \frac{x+1}{y}$
2. $y' + y = 2x + 1$
3. $(2xy - y + 2x)dx + (x^2 - x)dy = 0$

4. $y' = \left(\dfrac{x^2-1}{y^2+1}\right)$

5. $\left(\dfrac{y}{xy+1}+x^2\right)dx + \left(\dfrac{x}{xy+1}\right)dx = 0$

6. $(2x\sin xy + x^2 y\cos xy)dx + M(x^2\cos xy)dy = 0$

7. $y' = xy^2 + 2xy$

8. $(y+y^2)dx + (y^2 - x^2 - xy)dy = 0$

9. $y' = \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

10. $(2x+y+1)dx + (x+3y+2)dy = 0$

B. Tentukan selesaian masalah nilai awal

1. $y' = (1+y^2)\tan x$ dengan $y(0) = \sqrt{3}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$ dengan $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

3. $(x^2+3y^2)dx - 2xydy = 0$ dengan $y(2) = 6$

4. $(2xy-3)dx + (x^2+4y)dy = 0$ dengan $y(1) = 2$

5. $\left(\dfrac{3-y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{y^2-1}{xy^2}\right)dy = 0$

C. Tentukan $M(x,y)$ dan A sedemikian sehingga persamaan berikut eksak.

1. $(x^3+xy^2)dx + M(x,y)dy = 0$

2. $\left(\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{x}{y^3}\right)dx + M(x,y)dy = 0$

3. $(x^2+3xy)dx + (Ax^2+4y)dy = 0$

4. $\left(\dfrac{Ay}{x^3}+\dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)dy = 0$

5. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(\dfrac{Ax+1}{y^3}\right)dy = 0$

D. Tentukan faktor integrasi dan selesaian persamaan di bawan ini

1. $xdy + ydx = (x^2 + y^2)dx$
2. $(2y - 3x)dx + xdy = 0$
3. $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$
4. $xdy + ydx = 3x^2(x^2 + y^2)dx$
5. $ydx - xdy + \ln x\, dx = 0$
6. $(3x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
7. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$
8. $(x + y)dx - x^2 dy = 0$